Fonctions de deux variables

On note $(.|.)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

Les éléments de $\mathbb{R}^2$ seront, selon l'interprétation souhaitée, appelés points ou vecteurs.

I. Limite et continuité des fonctions de deux variables réelles

1°) Fonctions réelles de deux variables réelles

Déf : On appelle fonction réelle de deux variables définies sur A toute application

$$f:\begin{cases}A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ x=(x_1,x_2)\mapsto f(x)=f(x_1,x_2)\end{cases}.$$

L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ et est muni d'une structure d'anneau et de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois usuelles.

Déf : On appelle fonction polynomiale réelle de deux variables définie sur $A\subset\mathbb{R}^2$ toute application de la forme : $p:\begin{cases}A\to\mathbb{R}\\ (x_1,x_2)\mapsto\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}a_{p,q}x_1^p x_2^q\end{cases}$ avec $m,n\in\mathbb{N},a_{p,q}\in\mathbb{R}$.

Déf : On appelle fonction rationnelle réelle de deux variables définie sur $A\subset\mathbb{R}^2$ toute application de la forme : $f:\begin{cases}A\to\mathbb{R}\\ (x_1,x_2)\mapsto\dfrac{p(x_1,x_2)}{q(x_1,x_2)}\end{cases}$ où p,q sont des fonctions polynomiales, q ne s'annule pas sur A.

Déf : On appelle surface représentative de $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ l'ensemble :

$$\Sigma_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(x,y)\in A,z=f(x,y)\right\}.$$

2°) Limite

Soit $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$.

a) définition

Déf : Pour $r\in\mathbb{R}^{+*}$, on note $D(a,r)$ le disque de centre a et de rayon r, $D(a,r)=\left\{x\in\mathbb{R}^2/\|x-a\|\le r\right\}$.

Déf : Soit $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. On dit que f est définie au voisinage de A ssi $\forall\alpha>0,D(a,\alpha)\cap A\neq\varnothing$.

Déf : Soit $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie au voisinage de a.

On dit que f tend vers $\ell\in\mathbb{R}$ en a ssi

$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in A,\|x-a\|\le\alpha\Rightarrow|f(x)-\ell|\le\varepsilon$.

On dit que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a ssi

$\forall M\in\mathbb{R},\exists\alpha>0,\forall x\in A,\|x-a\|\le\alpha\Rightarrow f(x)\ge M$ (resp. $f(x)\le M$).

Lorsque f tend vers $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ en a, on dit que f admet une limite en a et on note : $f\underset{a}{\to}\ell, f(x)\underset{x\to a}{\to}\ell$ ou $f(x_1,x_2)\xrightarrow[(x_1,x_2)\to a]{}\ell$.

Prop : Soit $f:A=A'\cup A''\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$.

Si $f(x)\xrightarrow[\substack{x\to a\\x\in A'}]{}\ell$ et $f(x)\xrightarrow[\substack{x\to a\\x\in A''}]{}\ell$ alors $f(x)\xrightarrow[\substack{x\to a\\x\in A}]{}\ell$.

b) propriétés

Les résultats qui suivent s'obtiennent en suivant les mêmes démarches que pour les fonctions d'une variable.

Prop : Si $f\underset{a}{\to}\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ et $f\underset{a}{\to}\ell'\in\overline{\mathbb{R}}$ alors $\ell=\ell'$.

Déf : Si $f\underset{a}{\to}\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ alors ℓ est appelé la limite de f en a et on note

$$\ell=\lim_a f=\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}f(x_1,x_2).$$

Prop : Soit $f,g,h : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Si $|f(x)-\ell| \leq g(x)$ et $g \underset{a}{\to} 0$ alors $f \underset{a}{\to} \ell$.

Si $g \leq f \leq h, g \underset{a}{\to} \ell, h \underset{a}{\to} \ell$ alors $f \underset{a}{\to} \ell$.

Si $f \leq g$ et $f \underset{a}{\to} +\infty$ alors $g \underset{a}{\to} +\infty$.

Si $f \leq g$ et $g \underset{a}{\to} -\infty$ alors $f \underset{a}{\to} -\infty$.

Prop : (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soit $f : \begin{cases} A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) \end{cases}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On a équivalence entre :

(i) $f \underset{a}{\to} \ell$

(ii) Pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a on a $f(u_n) \to \ell$.

Prop : Soit $f,g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que $f \underset{a}{\to} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $g \underset{a}{\to} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\ell + \ell'$ est définie dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $f+g \underset{a}{\to} \ell + \ell'$.

Si $\ell\ell'$ est définie dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $fg \underset{a}{\to} \ell\ell'$.

Prop : Soit $f : \begin{cases} A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \to g(t) \end{cases}$ telles que $f(A) \subset \mathcal{D}$.

Si $f(x_1,x_2) \underset{(x_1,x_2)\to a}{\to} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $g(t) \underset{t\to\ell}{\to} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$

alors $(g \circ f)(x_1,x_2) \underset{(x_1,x_2)\to a}{\to} \ell'$.

Prop : Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \end{cases}$ et $f : \begin{cases} A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) \end{cases}$ telles que $\varphi(\mathcal{D}) \subset A$ et $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\varphi(t) \underset{t\to t_0}{\to} a$ et $f(x_1,x_2) \underset{(x_1,x_2)\to a}{\to} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

alors $(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \underset{t\to t_0}{\to} \ell$.

c) exemples d'étude

Prop : Considérons $p_1 : (x_1,x_2) \mapsto x_1$ et $p_2 : (x_1,x_2) \mapsto x_2$.

En tout $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ on a $p_1 \underset{a}{\to} a_1$ et $p_2 \underset{a}{\to} a_2$

Autrement dit $x_1 \underset{x\to a}{\to} a_1$ et $x_2 \underset{x\to a}{\to} a_2$.

3°) Continuité

Déf : On dit que $f : A \to \mathbb{R}$ est continue en un point $a \in A$ ssi $f \underset{a}{\to} f(a)$.

On dit que f est continue sur A ssi f est continue en tout point $a \in A$.

On note $\mathcal{C}(A,\mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Prop : Soit $f,g : A \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues alors $\lambda.f, f+g, fg$ le sont aussi.

Ainsi $\mathcal{C}(A,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel et un sous anneau de $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$.

Prop : Soit $f : \begin{cases} A \to \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ t \to g(t) \end{cases}$ telles que $f(A) \subset \mathcal{D}$.

Si f et g sont continues alors $g \circ f : (x_1,x_2) \mapsto g(f(x_1,x_2))$ est continue.

Prop : Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \end{cases}$ et $f : \begin{cases} A \to \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) \end{cases}$ telles que $\varphi(\mathcal{D}) \subset A$.

Si f et φ sont continues alors $f \circ \varphi : t \mapsto f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ l'est aussi.

4°) Applications partielles

Déf : Soit $f:\begin{cases}A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)\end{cases}$ et $a=(a_1,a_2)\in A$.

On appelle première (resp. deuxième) application partielle de f au point a la fonction d'une variable : $f(.,a_2):x_1\mapsto f(x_1,a_2)$ (resp. $f(a_1,.):x_2\mapsto f(a_1,x_2)$).

Prop : Si $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est continue alors les applications partielles de f en tout point $a=(a_1,a_2)\in A$ sont continues.

5°) Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbf{R^2}$

Soit $f:\begin{cases}A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\(x_1,x_2)\mapsto(f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2))\end{cases}$.

Déf : Les fonctions réelles f_1,f_2 sont appelées fonctions coordonnées de f.

Déf : Soit $a\in\mathbb{R}^2$ tel que f est définie au voisinage de a.

On dit que f converge vers $\ell\in\mathbb{R}^2$ en a et on note $f\underset{a}{\to}\ell$ ssi

$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in A,\|x-a\|\le\alpha\Rightarrow\|f(x)-\ell\|\le\varepsilon$.

Un tel ℓ est alors unique, on l'appelle limite de f en a.

Prop : Soit $\ell=(\ell_1,\ell_2)$. On a équivalence entre :

(i) $f\xrightarrow[a]{}\ell$,

(ii) $\|f(x)-\ell\|\xrightarrow[x\to a]{}0$,

(iii) $f_1\xrightarrow[a]{}\ell_1$ et $f_2\xrightarrow[a]{}\ell_2$.

Prop : Soit $f:\begin{cases}A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)\end{cases}$, $g:\begin{cases}B\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(y_1,y_2)\mapsto g(y_1,y_2)\end{cases}$ telles que $f(A)\subset B$.

Si $f\underset{a}{\to}b$ et $g\underset{b}{\to}\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ alors $g\circ f\underset{a}{\to}\ell$.

Déf : Soit $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. On dit que f est continue en $a\in A$ ssi $f\underset{a}{\to}f(a)$. On dit que f est continue ssi f l'est en tout point $a\in A$. On note $\mathcal{C}(A,\mathbb{R}^2)$ l'ensemble de ces applications.

Prop : $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est continue ssi ses fonctions coordonnées f_1 et f_2 le sont.

Prop : Soit $f:\begin{cases}A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)\end{cases}$ et $g:\begin{cases}B\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(y_1,y_2)\mapsto g(y_1,y_2)\end{cases}$ telles que $f(A)\subset B$. Si f et g sont continues alors $g\circ f$ l'est aussi.

II. Dérivées partielles

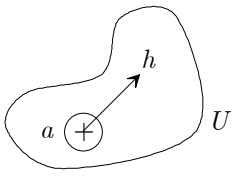
1°) Ouvert de $\mathbf{R^2}$

Déf : Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est dite ouverte ssi $\forall a\in U,\exists\alpha>0,D(a,\alpha)\subset U$.

Désormais, U et V désignent des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et I un intervalle non singulier de $\mathbb{R}$.

2°) Dérivée selon un vecteur

Soit $f:\begin{cases}U\to\mathbb{R}\\(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)\end{cases}$ et $a=(a_1,a_2)\in U$.



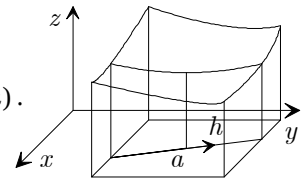
Comme U est ouvert : $\exists\alpha>0,D(a,\alpha)\subset U$.

Soit $h=(h_1,h_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

L'application $t\mapsto f(a+t.h)=f(a_1+th_1,a_2+th_2)$ est définie au voisinage de 0.

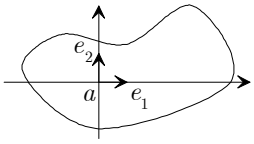
Déf : On dit que f est dérivable en a selon le vecteur h ssi l'application $t \mapsto f(a+t.h)$ est dérivable en 0. Si tel est le cas, son nombre dérivé est appelé nombre dérivé de f en a selon le vecteur h et on le note $D_h f(a)$.

Ainsi, sous réserve d'existence : $D_h f(a) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\big(f(a+t.h) - f(a)\big)$.



3°) Dérivées partielles

Soit $f : \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) \end{cases}$ et $a = (a_1, a_2) \in U$.



Notons $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Pour $i = 1$ ou 2.

Déf : Sous réserve d'existence, on appelle nombre dérivé partiel de f en a selon sa $i^{\text{ème}}$ variable le nombre dérivé de f en a selon e_i. On le note $D_i f(a)$ au lieu de $D_{e_i} f(a)$.

Déf : Sous réserve d'existence, on appelle dérivée partielle de f selon sa $i^{\text{ème}}$ variable l'application :

$D_i f : \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ a \mapsto D_i f(a) \end{cases}$.

Théorème :

Les dérivées partielles de f sont les dérivées de ses applications partielles.

Cor : $D_1 f(x_1, x_2) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}\big(f(x_1, x_2)\big)$ et $D_2 f(x_1, x_2) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2}\big(f(x_1, x_2)\big)$

4°) Opérations sur les dérivées partielles

Soit $i = 1$ ou 2.

Prop : Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $D_i f$ et $D_i g$ existent alors $D_i(\lambda f), D_i(f+g), D_i(fg)$ existent et

$D_i(\lambda f) = \lambda D_i f$, $D_i(f+g) = D_i f + D_i g$ et $D_i(fg) = D_i f \times g + f \times D_i g$

Prop : Soit $f : \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto g(t) \end{cases}$ telles que $f(U) \subset I$.

Soit $a \in U$.

Si $D_i f$ et g' existent alors $D_i(g \circ f)$ existe et $D_i(g \circ f) = D_i f \times g' \circ f$.

5°) Fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, on définit la notion de dérivée selon un vecteur et de dérivées partielles pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
On obtient :

Prop : $f : U \to \mathbb{R}^2$ est dérivable en $a \in U$ selon $h \in \mathbb{R}^2$ ssi ses fonctions coordonnées f_1 et f_2 le sont et alors $D_h f(a) = (D_h f_1(a), D_h f(a))$.

III. Fonctions de classe C^1

1°) Définition

Déf : On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ssi ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.
On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Théorème : développement limité à l'ordre 1 (admis)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $a \in U$.

On peut écrire, pour tout $h = (h_1, h_2)$ tel que $a + h \in U$:

$f(a+h) = f(a) + D_1 f(a).h_1 + D_2 f(a).h_2 + \|h\| \varepsilon(h)$

avec ε une fonction telle que $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$.

Cette relation est appelée développement limité à l'ordre 1 de f en a.

Cor : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f est continue.

2°) Gradient

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.

Prop : f est dérivable en a selon tout vecteur $h = (h_1, h_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et $D_h f(a) = D_1 f(a).h_1 + D_2 f(a).h_2$.

Déf : On pose $\text{grad}\, f(a) = \big(D_1 f(a), D_2 f(a)\big)$ appelé gradient de f en a.

Prop : $D_h f(a) = (\text{grad}\, f(a) \mid h)$.

3°) Opérations sur les fonctions de classe C^1

Prop : Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\lambda.f, f+g, fg$ le sont aussi.

Prop : Soit $f : \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto g(t) \end{cases}$ telles que $f(U) \subset I$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $g \circ f : (x_1, x_2) \mapsto g(f(x_1, x_2))$ l'est aussi.

Prop : Soit $\varphi : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \end{cases}$ et $f : \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) \end{cases}$ telles que $\varphi(I) \subset U$.

Si f et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $f \circ \varphi : t \mapsto f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ l'est aussi et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \varphi_1'(t) D_1 f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi_2'(t) D_2 f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

4°) Fonctions à valeurs dans R^2

Déf : Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ ssi ses dérivées partielles existent et sont continues.

Prop : $f : U \to \mathbb{R}^2$ est $\mathcal{C}^1$ ssi ses fonctions coordonnées le sont.

Théorème :

Soit $f : \begin{cases} U \to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ (y_1, y_2) \mapsto g(y_1, y_2) \end{cases}$ telles que $f(U) \subset V$.

Si f et g sont $\mathcal{C}^1$ alors $g \circ f$ l'est aussi et on a :

$\mathrm{D}_1(g \circ f)(x_1, x_2) = \mathrm{D}_1 f_1(x_1, x_2) \mathrm{D}_1 g(f(x_1, x_2)) + \mathrm{D}_1 f_2(x_1, x_2) \mathrm{D}_2 g(f(x_1, x_2))$,

$\mathrm{D}_2(g \circ f)(x_1, x_2) = \mathrm{D}_2 f_1(x_1, x_2) \mathrm{D}_1 g(f(x_1, x_2)) + \mathrm{D}_2 f_2(x_1, x_2) \mathrm{D}_2 g(f(x_1, x_2))$.

IV. Fonctions de classe C^2

1°) Dérivées partielles d'ordre 2

Déf : Soit $f : \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) \end{cases}$.

Pour $i, j = 1$ ou 2, l'application $\mathrm{D}_j(\mathrm{D}_i f)$, si elle existe, est appelée dérivée partielle d'ordre 2 de f en sa $i^{\text{ème}}$ puis $j^{\text{ème}}$ variable. Celle-ci est notée $D_{j,i} f$.

2°) Fonctions de classe C^2

Déf : Soit $f : \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) \end{cases}$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U (avec $n \in \mathbb{N}$) ssi toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f existent et sont continues sur U.

On note $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de U vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Prop : f est de classe $\mathcal{C}^2$ ssi $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème : de Schwarz (admis)

Soit $f:\begin{cases}U\to\mathbb{R}\\(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)\end{cases}$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}$.

3°) Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

En exploitant les formules de dérivation partielle précédemment présentées on établit les résultats qui suivent :

Prop : Soit $f,g:U\to\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ alors $\lambda.f, f+g, fg$ le sont aussi.

Prop : Soit $f:\begin{cases}U\to\mathbb{R}\\(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)\end{cases}$ et $g:\begin{cases}I\to\mathbb{R}\\t\mapsto g(t)\end{cases}$ telle que $f(U)\subset I$.

Si f et g sont $\mathcal{C}^2$ alors $g\circ f:(x_1,x_2)\mapsto g(f(x_1,x_2))$ l'est aussi.

Prop : Soit $\varphi:\begin{cases}I\to\mathbb{R}^2\\t\mapsto(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\end{cases}$ et $f:\begin{cases}U\to\mathbb{R}\\(x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2)\end{cases}$ telle que $\varphi(I)\subset U$.

Si f et φ sont de classe $\mathcal{C}^2$ alors $f\circ\varphi$ l'est aussi.

4°) Fonctions à valeurs dans $\mathbf{R^2}$

Prop : $f:U\to\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ ssi ses fonctions coordonnées le sont.

Prop : Soit $f:\begin{cases}U\to\mathbb{R}^2\\(x_1,x_2)\mapsto(f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2))\end{cases}$ et $g:\begin{cases}V\to\mathbb{R}\\(y_1,y_2)\mapsto g(y_1,y_2)\end{cases}$ telles que $f(U)\subset V$.

Si f et g sont $\mathcal{C}^2$ alors $g\circ f$ l'est aussi.

V. Manipulation de fonctions de deux variables

1°) Recherche d'extremum

Déf : On dit que $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ admet un minimum (resp. maximum) local en $a\in A$ ssi $\exists\alpha>0,\forall x\in D(a,\alpha)\cap A, f(x)\geq f(a)$ (resp. $f(x)\leq f(a)$).

Déf : Soit $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f admet un point critique en $a\in U$ ssi ses dérivées partielles s'y annulent.

Prop : Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Si f admet un extremum local en $a\in U$ alors c'est un point critique de f.

2°) Equations aux dérivées partielles d'ordre 1

Déf : Résoudre sur U une équation aux dérivées partielles d'ordre 1 en l'inconnue $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$, c'est déterminer toutes les fonctions réelles f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U vérifiant une relation donnée entre f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Prop : Soit I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ et $U=I\times J$.

Les solutions sur U de l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ sont les fonctions $f:(x,y)\mapsto C(y)$ où $C\in\mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$.

Les solutions sur U de l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ sont les fonctions $f:(x,y)\mapsto C(x)$ où $C\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$.

3°) Equations aux dérivées partielles d'ordre 2

Déf : Résoudre sur U une équation aux dérivées partielles d'ordre 2, c'est déterminer toutes les fonctions réelles $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U vérifiant une relation donnée entre f, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Prop : Soit I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ et $U = I \times J$.

Les solutions sur U des équations $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ sont respectivement les fonctions $f:(x,y)\mapsto xC(y)+D(y)$, $f:(x,y)\mapsto yC(x)+D(x)$ et $f:(x,y)\mapsto C(x)+D(y)$ avec C et D fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur I ou J selon les cas.

4°) Problème de primitivation

Déf : Soit $a,b\in\mathbb{R}^2$. On appelle segment d'extrémités a et b l'ensemble $[a,b]=\{a+\lambda(b-a)/\lambda\in[0,1]\}$.

Déf : On dit qu'un ouvert U est étoilé ssi $\exists a\in U, \forall b\in U, [a,b]\subset U$.

Théorème : de Poincaré (admis)

Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$.

Soit $P,Q:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Le système $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=P(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)\end{cases}$ admet une solution sur U ssi $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

De plus, si tel est le cas, les solutions se déduisent les une des autres par l'addition d'une constante.

VI. Analyse vectorielle

$\mathcal{P}$ désigne le plan géométrique muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$.

$\mathcal{E}$ désigne l'espace géométrique muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1°) Champ scalaire

a) définition

Déf : On appelle champ scalaire du plan (resp. de l'espace) toute fonction $F:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ définie sur une partie $\mathcal{D}$ du plan (resp. de l'espace).

b) représentations dans le cadre du plan

Soit $F:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ un champ scalaire du plan.

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que le point M de coordonnées (x,y) appartienne à $\mathcal{D}$, on pose $f(x,y)=F(M)$.

Déf : La fonction f est appelée représentation cartésienne de la fonction F.

On dit que F est continue (resp. de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$) ssi f l'est.

Déf : Si M désigne le point de coordonnées cartésiennes (x,y) on pose, sous réserve d'existence :

$\frac{\partial F}{\partial x}(M)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(M)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Pour tout couple $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ tel que le point M de coordonnées polaires (ρ,θ) appartienne à $\mathcal{D}$, posons $\tilde{f}(\rho,\theta)=F(M)$.

Déf : La fonction $\tilde{f}$ est appelée représentation polaire de la fonction F.

Déf : Si M désigne le point de coordonnées polaire (ρ,θ) on pose, sous réserve d'existence :

$\frac{\partial F}{\partial \rho}(M)=\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}(\rho,\theta)$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}(M)=\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(\rho,\theta)$.

c) représentations dans le cadre de l'espace

Soit $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ un champ scalaire de l'espace.

Comme dans le plan on introduit sa représentation cartésienne qui permet de définir, sous réserve d'existence $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial z}$.

A partir des notions de coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et sphériques (r, θ, φ), on introduit aussi les notions de représentations cylindriques et sphériques de la fonction F. Ceci permet de donner un sens à :

$\frac{\partial F}{\partial \rho}(M)$, $\frac{\partial F}{\partial \varphi}(M)$, $\frac{\partial F}{\partial z}(M)$ et à $\frac{\partial F}{\partial r}(M)$, $\frac{\partial F}{\partial \theta}(M)$, $\frac{\partial F}{\partial \varphi}(M)$.

2°) Champ de vecteurs

Déf : On appelle champ de vecteurs du plan (resp. de l'espace) toute application $\vec{F} : \mathcal{D} \to P$ (resp. $\vec{F} : \mathcal{D} \to E$) définie sur une partie $\mathcal{D}$ du plan (resp. de l'espace) et à valeurs dans P (resp. E) direction de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{E}$).

Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs défini sur $\mathcal{D}$. Pour tout $M \in \mathcal{D}$, on peut écrire $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$ (resp. $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$) ce qui introduit $P, Q : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ (resp. $P, Q, R : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$).

Déf : Les champs scalaires P et Q (resp. P, Q, R) sont appelés fonctions composantes de $\vec{F}$.

Déf : Un champ de vecteurs est dit continue (resp. de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$) ssi ses fonctions composantes le sont.

3°) Gradient d'un champ scalaire

Déf : Soit F un champ scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ du plan (resp. de l'espace).

On appelle gradient de F le champ de vecteurs défini par : $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) = \frac{\partial F}{\partial x}(M)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(M)\vec{j}$.

(resp. $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) = \frac{\partial F}{\partial x}(M)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(M)\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(M)\vec{k}$).

Prop : Soit F et G deux champs scalaires de classe $\mathcal{C}^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{\text{grad}}\, \lambda.F = \lambda.\overrightarrow{\text{grad}}\, F$, $\overrightarrow{\text{grad}}\,(F+G) = \overrightarrow{\text{grad}}\, F + \overrightarrow{\text{grad}}\, G$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\,(FG) = F.\overrightarrow{\text{grad}}\, G + G.\overrightarrow{\text{grad}}\, F$.

Prop : Soit F un champ scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ du plan.

On a $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) = \frac{\partial F}{\partial \rho}(M)\vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}(M)\vec{v}_\theta$.

4°) Potentiel scalaire

a) définition

Déf : On dit qu'un champ de vecteurs $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire ssi il existe un champ scalaire V de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, V$. V est alors appelé potentiel scalaire de $\vec{F}$.

b) cadre du plan

Si $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$ alors $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, V$ ssi $\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x}(M) = P(M) \\ \frac{\partial V}{\partial y}(M) = Q(M) \end{cases}$.

Théorème :

Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ de fonctions composantes P et Q.

Pour que $\vec{F}$ dérive d'un champ scalaire il est nécessaire que : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

De plus, si $\vec{F}$ est défini sur un ouvert étoilé, cette condition est suffisante.

c) cadre de l'espace

Si $\vec{F}(M)=P(M)\vec{i}+Q(M)\vec{j}+R(M)\vec{k}$ alors $\vec{F}=\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ ssi

$\dfrac{\partial V}{\partial x}(M)=P(M),\dfrac{\partial V}{\partial y}(M)=Q(M),\dfrac{\partial V}{\partial z}(M)=R(M)$.

Théorème : (Cas de l'espace)

Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ de fonctions composantes P,Q,R.

Pour que $\vec{F}$ dérive d'un champ scalaire il est nécessaire que : $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$.

De plus, si $\vec{F}$ est défini sur un ouvert étoilé, cette condition est suffisante.

5°) Divergence d'un champ de vecteurs

Déf : Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs du plan (resp. de l'espace) de classe $\mathcal{C}^1$ et de fonctions composantes P et Q (resp. P,Q,R).

On appelle divergence de $\vec{F}$ le champ scalaire défini par :

$\text{div}\,\vec{F}(M)=\dfrac{\partial P}{\partial x}(M)+\dfrac{\partial Q}{\partial y}(M)$ (resp. $\text{div}\,\vec{F}(M)=\dfrac{\partial P}{\partial x}(M)+\dfrac{\partial Q}{\partial y}(M)+\dfrac{\partial R}{\partial z}(M)$)

Prop : Soit $\vec{F},\vec{G}$ champs de vecteurs $\mathcal{C}^1$, F un champ scalaire $\mathcal{C}^1$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\text{div}(\lambda.\vec{F})=\lambda.\text{div}\,\vec{F}$, $\text{div}(\vec{F}+\vec{G})=\text{div}\,\vec{F}+\text{div}\,\vec{G}$ et $\text{div}(F.\vec{G})=F.\text{div}\,\vec{G}+\overrightarrow{\text{grad}}\,F.\vec{G}$.

6°) Rotationnel d'un champ de vecteurs de l'espace

Déf : Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ de fonctions composantes P,Q,R.

On appelle rotationnel de $\vec{F}$ le champ de vecteurs défini par :

$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{F}=\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$.

Prop : Soit $\vec{F},\vec{G}$ champs de vecteurs $\mathcal{C}^1$, F un champ scalaire $\mathcal{C}^1$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\overrightarrow{\text{Rot}}\,(\lambda.\vec{F})=\lambda.\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{F}$, $\overrightarrow{\text{Rot}}\,(\vec{F}+\vec{G})=\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{F}+\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{G}$ et $\overrightarrow{\text{Rot}}\,(F.\vec{G})=F.\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{G}+\overrightarrow{\text{grad}}\,F\wedge\vec{G}$.

Prop : Soit F un champ scalaire $\mathcal{C}^2$: $\overrightarrow{\text{Rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\,F)=\vec{0}$.

Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^2$: $\text{div}(\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{F})=0$.

7°) Opérateur nabla

On introduit l'opérateur différentiel nabla :

$\vec{\nabla}=\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}$ (resp. $\vec{\nabla}=\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$).

On observe « formellement » que :

$\overrightarrow{\text{grad}}\,F=\vec{\nabla}(F),\text{div}\,\vec{F}=\vec{\nabla}.\vec{F}$ et $\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{F}=\vec{\nabla}\wedge\vec{F}$.

La propriété $\overrightarrow{\text{Rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\,f)=\vec{0}$ se relit $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}f)=\vec{0}$,

la propriété $\text{div}(\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{F})=0$ se relit $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})=0$.